エピ射*

結城浩 / Hiroshi Yuki

2021 年 6 月 19 日

定義

$\mathscr{A}$ を圏、A, B を $\mathscr{A}$ の対象、f を A から B への射 f とする。

対象 B から圏 $\mathscr{A}$ の任意の対象 Z への任意の平行射 g_1, g_2 に対して、

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \quad ならば \quad g_1 = g_2$$

が成り立つとき、射 f は**エピ射**であるという。エピ、エピックともいう。

例

集合の圏 **Set** における全射はエピ射であり、逆にエピ射は全射である。

もしも全射である $f : A \to B$ がエピ射ではないと仮定すると、ある集合 Z に対して、$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ かつ $g_1 \neq g_2$ を満たす平行射 $g_1, g_2 : B \to Z$ が存在する。このとき、$g_1 \neq g_2$ から、集合 B のある元 b に対して $g_1(b) \neq g_2(b)$ となるはずである。ところがこのとき f が全射であることから、$f(a) = b$ を満たす集合 A の元 a が存在するので、$g_1(f(a)) \neq g_2(f(a))$ となる。しかし、これは $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ に矛盾する。したがって f はエピ射である。

* https://pdf.hyuki.net/20210619070453

（背理法を使わないで書いてみます）平行射 $g_1, g_2 : B \to Z$ に対して、$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ が成り立つとき、集合 A の任意の元 x に対して、$(g_1 \circ f)(x) = (g_2 \circ f)(x)$ つまり、$g_1(f(x)) = g_2(f(x))$ である。$f : A \to B$ が全射ならば、集合 B の任意の元 y に対して $f(a) = y$ を満たす集合 A の元 a が存在するので、その a についても、$g_1(f(a)) = g_2(f(a))$ が成り立つ。つまり、集合 B の任意の元 y に対して $g_1(y) = g_2(y)$ である。よって $g_1 = g_2$ が成り立ち、f はエピ射である。

もしもエピ射である $f : A \to B$ が全射ではないと仮定すると、f の像に属していない集合 B の元が存在するので、それを b と置く。$Z = \{0, 1\}$ として、$g_1(b) \neq g_2(b)$ となる B から Z への平行射 g_1, g_2 を考えると、$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ なのに $g_1 \neq g_2$ となるので f がエピ射であることに矛盾する。したがって f は全射である。

$g_1(b) \neq g_2(b)$ となる平行射 g_1, g_2 は、

- $g_1 : B \to Z$ は集合 B の任意の元 x に対して $g_1(x) = 1$
- $g_2 : B \to Z$ は x が写像 f の像に属するとき $g_2(x) = 1$ で、属さないとき $g_2(x) = 0$

として構成できる。

次の一歩は……

- エピ射が全射ではない圏の例……
- モノ射との関係……
- より基本的な用語……
- 写像の代数的扱い……
- 参考文献の参照ページ……