$(\sin x)' = \cos x$ の証明*

結城浩 / Hiroshi Yuki

2021 年 3 月 1 日

三角関数の加法定理より、

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta && \cdots(1) \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta && \cdots(2)
\end{aligned}
$$

である。(1) − (2) より、

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

を得る。ところで、

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &= x + h \\
\alpha - \beta &= x
\end{aligned}
$$

を α と β について解くと、

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x + \frac{h}{2} \\
\beta &= \frac{h}{2}
\end{aligned}
$$

* https://pdf.hyuki.net/20210301213121

になる。したがって、

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos(x + \tfrac{h}{2})\sin\tfrac{h}{2} \qquad \cdots (3)$$

となる。(3) を用いて $(\sin x)'$ を計算する。導関数の定義より、

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos(x+\tfrac{h}{2})\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1, \quad \lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{h}{2}) = \cos x$$

であるから、

$$(\sin x)' = \cos x$$

が示された。（証明終わり）