閉包は閉集合 *

結城浩 / Hiroshi Yuki

2020 年 5 月 16 日

問題

位相空間 X の部分集合 S に対して、S の閉包 $\overline{S}$ を、

$$\overline{S} = \left\{ x \in X \;\middle|\; x \text{ の任意の開近傍 } V \text{ に対して } V \cap S \neq \varnothing \right\}$$

と定義します。

このとき、$\overline{S}$ は閉集合であることを証明してください。

* https://pdf.hyuki.net/20200516112935

解答

$\overline{S}^c$ に属する点 x は、$\overline{S}$ には属していません。ですから、$\overline{S}^c$ に属する任意の点 x に対して、$O_x \cap S = \varnothing$ を満たす x の開近傍 O_x が存在します。

x の開近傍 O_x は、O_x に属する任意の点 y に対しても開近傍になっています。ですから、$O_x \cap S = \varnothing$ のとき、O_x に属する任意の点 y は $\overline{S}$ に属しておらず、$\overline{S}^c$ に属しています。

ここで、点 x が $\overline{S}^c$ 全体を動くとき、$O_x \cap S = \varnothing$ を満たす x の開近傍 O_x 全体の和集合は $\overline{S}^c$ に等しくなります。すなわち、

$$\bigcup_{\substack{x \in \overline{S}^c \\ O_x \cap S = \varnothing}} O_x = \overline{S}^c$$

です。なぜなら、左辺の任意の点 y は $\overline{S}^c$ に属し、右辺の任意の点 x は左辺の集合に属しているからです。

開近傍は開集合で、開集合の和集合もまた開集合ですから、$\overline{S}^c$ は開集合となり、$\overline{S}$ が閉集合であることが証明できました。

（証明終わり）

参考文献

[1] 志賀浩二, 『位相への 30 講』, 朝倉書店, ISBN978-4-254-11479-9, 1988 年.

[2] 松坂和夫,『集合・位相入門』, 岩波書店, ISBN978-4-00-005424-9, 1968 年.

[3] 一樂重雄,『位相幾何学 新数学講座 8』, 朝倉書店, ISBN978-4-254-11438-6, 1993 年.