

# 否定命題の問題

結城浩 / Hiroshi Yuki

2020年5月14日

## 問題

「4の倍数でもあり、6の倍数でもある整数は、すべて24の倍数である」という命題を  $P$  とします。このとき命題  $P$  の否定命題  $\neg P$  を日本語で述べてください。また、命題  $\neg P$  は真ですか、偽ですか。(大学入試問題改題)

## 解答 (例)

命題  $\neg P$  を日本語で述べると「4 の倍数でもあり、6 の倍数でもある整数には、24 の倍数ではないものが存在する」になります。この命題  $\neg P$  は真です。たとえば、整数 12 は、4 の倍数でもあり、6 の倍数でもありますが、24 の倍数ではありません。

## 補足

「整数  $n$  は整数  $d$  の倍数である」という条件を  $Q(n, d)$  と書くことにします。すると、

$$P \equiv \forall n \in \mathbb{Z} [(Q(n, 4) \wedge Q(n, 6)) \rightarrow Q(n, 24)]$$

と書けます。この命題の否定を次のように変形していけば、考えやすくなります。

$$\begin{aligned}\neg P &\equiv \neg (\forall n \in \mathbb{Z} [(Q(n, 4) \wedge Q(n, 6)) \rightarrow Q(n, 24)]) \\ &\equiv \neg (\forall n \in \mathbb{Z} [\neg(Q(n, 4) \wedge Q(n, 6)) \vee Q(n, 24)]) \\ &\equiv \neg (\forall n \in \mathbb{Z} [\neg Q(n, 4) \vee \neg Q(n, 6) \vee Q(n, 24)]) \\ &\equiv \exists n \in \mathbb{Z} [\neg(\neg Q(n, 4) \vee \neg Q(n, 6) \vee Q(n, 24))] \\ &\equiv \exists n \in \mathbb{Z} [Q(n, 4) \wedge Q(n, 6) \wedge \neg Q(n, 24)]\end{aligned}$$