反対圏の定義

結城浩 / Hiroshi Yuki

2020 年 5 月 12 日

1　はじめに

$\mathscr{A}$ を圏とします。

これから、圏 $\mathscr{A}$ の**反対圏**と呼ばれる圏 $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ を定義します。

定義した後で、$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ が確かに圏になっていることを確かめます。

2　$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の対象

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の対象を定義します。

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の対象の集まり $\mathrm{ob}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}})$ は、圏 $\mathscr{A}$ の対象の集まりに等しいと定義します。

すなわち、$\mathrm{ob}(\mathscr{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ です。

また、$\mathscr{A}$ の対象 A を $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の対象と見なすとき A^{op} と書くことにします。

すなわち、$A^{\mathrm{op}} = A$ です。

3　$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の射

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の射を定義します。

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の対象 A^{op} から B^{op} への射の集まり $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$ は、圏 $\mathscr{A}$ の対象 B から A への射の集まり $\mathscr{A}(B, A)$ に等しいと定義します (順序に注意)。

すなわち、$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}}) = \mathscr{A}(B, A)$ です。

また、$\mathscr{A}$ の射 $f \in \mathscr{A}(B, A)$ を $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の射と見なすとき f^{op} と書くことにします。

すなわち、$f^{\mathrm{op}} = f$ です。

また、$f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$ です。

4　$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の合成射

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の合成射を定義します。

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の二つの射 $f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$ と $g^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(B^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ に対して、f^{op} と g^{op} の合成射 $g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}}$ を、圏 $\mathscr{A}$ の射 $f \circ g \in \mathscr{A}(C, A)$ を $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の射と見なすことで定義します。すなわち、

$$g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}$$

です。

5　$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の恒等射

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の恒等射を定義します。

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の対象 A^{op} の恒等射 $1_{A^{\mathrm{op}}}$ を、$\mathscr{A}$ の対象 A の恒等射 1_A で定義します。

すなわち、$1_{A^{\mathrm{op}}} = 1_A$ です。

先ほど、圏 $\mathscr{A}$ の射 $f \in \mathscr{A}(B, A)$ を $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の射と見なすとき f^{op} と書く約束にして、$f^{\mathrm{op}} = f$ としました。

ですから、圏 $\mathscr{A}$ の射 $1_A \in \mathscr{A}(A, A)$ を $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の射と見なすとき $(1_A)^{\mathrm{op}}$ と書けて、$(1_A)^{\mathrm{op}} = 1_A$ です。

よって、$1_{A^{\mathrm{op}}} = 1_A = (1_A)^{\mathrm{op}}$ がいえます。

6 $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ が圏になっていることの確認

6.1 合成射 $g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ の確認

$f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$ とします。

$g^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(B^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ とします。

$\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ の合成射の定義から、$g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}$ です。

ここで、$f \circ g \in \mathscr{A}(C, A)$ なので、$(f \circ g)^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ となっています。

したがって、$g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ がいえました。

6.2 合成射が結合法則を満たすことの確認

$f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$ とします。

$g^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(B^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}})$ とします。

$h^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(C^{\mathrm{op}}, D^{\mathrm{op}})$ とします。

$$
\begin{aligned}
(f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}}) \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}} &= (g \circ f)^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}} && (f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}}) = (g \circ f)^{\mathrm{op}} \\
&= (h \circ (g \circ f))^{\mathrm{op}} && (\cdots)^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}} = (h \circ (\cdots))^{\mathrm{op}} \\
&= ((h \circ g) \circ f)^{\mathrm{op}} && \text{圏 } \mathscr{A} \text{ における合成射の結合法則} \\
&= f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} (h \circ g)^{\mathrm{op}} && ((\cdots) \circ f)^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} (\cdots)^{\mathrm{op}} \\
&= f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} (g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}}) && (h \circ g)^{\mathrm{op}} = g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$(f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}}) \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} (g^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} h^{\mathrm{op}})$$

がいえ、結合法則を満たすことが確かめられました。

6.3　恒等射が単位法則を満たすことの確認

$f^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(A^{\mathrm{op}}, B^{\mathrm{op}})$ とします。すなわち、$f \in \mathscr{A}(B, A)$ です。
$g^{\mathrm{op}} \in \mathscr{A}^{\mathrm{op}}(B^{\mathrm{op}}, A^{\mathrm{op}})$ とします。すなわち、$g \in \mathscr{A}(A, B)$ です。

$$\begin{aligned}
f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} 1_{A^{\mathrm{op}}} &= f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} (1_A)^{\mathrm{op}} && 1_{A^{\mathrm{op}}} = (1_A)^{\mathrm{op}} \\
&= (1_A \circ f)^{\mathrm{op}} && f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} (\cdots)^{\mathrm{op}} = (\cdots) \circ f^{\mathrm{op}} \\
&= f^{\mathrm{op}} && \text{圏 } \mathscr{A} \text{ における恒等射の単位法則}
\end{aligned}$$

したがって、

$$f^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} 1_{A^{\mathrm{op}}} = f^{\mathrm{op}}$$

がいえました。

$$\begin{aligned}
1_{A^{\mathrm{op}}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} &= (1_A)^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} && 1_{A^{\mathrm{op}}} = (1_A)^{\mathrm{op}} \\
&= (g \circ 1_A)^{\mathrm{op}} && (\cdots)^{\mathrm{op}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = g \circ (\cdots)^{\mathrm{op}} \\
&= g^{\mathrm{op}} && \text{圏 } \mathscr{A} \text{ における恒等射の単位法則}
\end{aligned}$$

したがって、

$$1_{A^{\mathrm{op}}} \circ^{\mathrm{op}} g^{\mathrm{op}} = g^{\mathrm{op}}$$

がいえました。

これで単位法則を満たすことが確かめられました。

以上で、圏 $\mathscr{A}$ の反対圏 $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ は確かに圏になっていることが確かめられました。

謝辞

いつもご教示ありがとうございます。

- 松森至宏さん（https://twitter.com/yoshi_matsumori）
- 梅崎直也さん（https://twitter.com/unaoya）
- なっふぃさん（https://twitter.com/naughiez）